VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Numerický výpočet určitého integrálu

Numerical Computation of Riemann Integral

Petr Beneš

Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.

Ostrava, 2021

Abstrakt

Tato práce se zabývá základními metodami numerické integrace funkcí jedné reálné proměnné. Každá metoda je postupně rozebrána, je podrobně odvozena její chyba a její použití je demonstrováno na vhodných příkladech. S pomocí jedné z metod je odvozen velice přesný odhad faktoriálu, který je poté použit při řešení náhodné procházky na přímce.

Klíčová slova

určitý integrál, metody numerické integrace, chyby numerické integrace, obdélníkové pravidlo, lichoběžníkové pravidlo, Simpsonovo pravidlo, odhad faktoriálu, náhodná procházka

Abstract

This bachelor thesis deals with basic methods of integrating functions of one real variable. Each method is analysed step by step, its error is derived in detail and its application is demonstrated on appropriate examples. Using one of the methods, a very accurate factorial estimate was derived and used for solving a random walk on a line.

Keywords

definite integral, methods of numerical integration, errors of numerical integration, rectangle rule, trapezoidal rule, Simpson's rule, factorial estimate, random walk

Poděkování

Velice rád bych poděkoval vedoucímu bakalářské práce doc. Mgr. Petru Vodstrčilovi, Ph.D. za všechen věnovaný čas, cenné rady a pomoc při tvoření této práce. Také bych rád poděkoval mé přítelkyni a spolužákům M. Mazůrkovi a D. Kotkovi za podporu během tvorby této práce.

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

$\mathbb{N}$	–	Množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	–	Množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	–	Množina kladných reálných čísel
$\langle a, b\rangle$	–	Uzavřený interval od a do b
(a, b)	–	Otevřený interval od a do b
$C^k(\langle a, b\rangle)$	–	Množina funkcí se spojitou k-tou derivací na $\langle a, b\rangle$
$O_{obd}(f, a, b)$	–	Přibližná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ získaná obdélníkovým pravidlem
$O_{obd}(f, a, b, n)$	–	Přibližná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ získaná složeným obdélníkovým pravidlem
$o_{obd}(f, a, b)$	–	Chyba obdélníkového pravidla
$o_{obd}(f, a, b, n)$	–	Chyba složeného obdélníkového pravidla
$O_{lich}(f, a, b)$	–	Přibližná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ získaná lichoběžníkovým pravidlem
$O_{lich}(f, a, b, n)$	–	Přibližná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ získaná složeným lichoběžníkovým pravidlem
$o_{lich}(f, a, b)$	–	Chyba lichoběžníkového pravidla
$o_{lich}(f, a, b, n)$	–	Chyba složeného lichoběžníkového pravidla
$O_{Simp}(f, a, b)$	–	Přibližná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ získaná Simpsonovým pravidlem
$O_{Simp}(f, a, b, n)$	–	Přibližná hodnota $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ získaná složeným Simpsonovým pravidlem
$o_{Simp}(f, a, b)$	–	Chyba Simpsonova pravidla
$o_{Simp}(f, a, b, n)$	–	Chyba složeného Simpsonova pravidla
$\blacksquare$	–	Konec důkazu, nebo příkladu

Seznam obrázků

Kapitola 1

Úvod

První myšlenky o výpočtech integrálu vznikly při problému spočítat obsah plochy. Jednodušší obdélníkové a trojúhelníkové plochy lze vypočítat vzorci, stejně jako objekty z nich složené. V případě obsahu méně pravidelných tvarů obecný vzoreček není vždy k dispozici. Proto vznikla snaha určit alespoň obsah plochy pod grafem nějaké funkce.

Georg Friedrich Bernhard Riemann přišel na metodu, kdy se snažil obsah plochy pod grafem funkce spočítat přibližně rozložením této plochy na sadu obdélníků. Zvládl tak odvodit, že rozložením daného intervalu na „nekonečně mnoho“ intervalů může spočítat tento obsah přesně [1].

Jeho odvození se od geometrické interpretace problému oddělilo. Vznikl pojem Riemannova integrálu, který lze řešit pomocí nalezení primitivní funkce k původní integrované funkci. Existují ale případy, kdy se na tento výpočet nemůžeme spolehnout. Například:

1. Primitivní funkci nelze nalézt
2. Určení primitivní funkce je příliš složité

V tom případě nám nezbývá jiná možnost, než se pokusit spočítat integrál alespoň přibližně. Tento výpočet není zpravidla vůbec složitý, ale je pracný a zdlouhavý. Rozvoj výpočetních systémů dovolil tyto výpočty udělat snadněji a rychleji.

V následujících kapitolách budou uvedeny základní metody numerické integrace a odvození jejich chyb. Navíc s pomocí jedné z metod budeme schopni velice přesně odhadnout hodnotu faktoriálu.

Kapitola 2

Metody výpočtu integrálu

2.1 Obecný princip metod

V této práci budeme vždy uvažovat funkci f, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$). Pro přibližné určení integrálu funkce f na $\langle a, b\rangle$ nahradíme funkci f jednodušší funkcí f_M, kde M bude značit jednu z později zmíněných metod. Primitivní funkce k funkci f_M bude přitom známá a snadno spočitatelná. Funkci f_M lze zvolit různými způsoby. Kvůli snadné integrovatelnosti se často volí polynomiální funkce, které budeme uvažovat i my. Metodu M numerické integrace lze obecně zapsat rovností

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b f_M(x)\mathrm{d}x}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_M(f,a,b)} + o_M(f, a, b),$$

kde $O_M(f, a, b)$ je přibližná hodnota integrálu, počítaná metodou M, a $o_M(f, a, b)$ je chyba, které se zpravidla dopustíme při použití metody M. Pro odvození metod uvedených v této kapitole jsem čerpal z [1, 2, 3].

2.2 Obdélníkové pravidlo

První používanou metodou je takzvané obdélníkové pravidlo. Jak již bylo zmíněno snažíme se vypočítat určitý integrál z funkce f, která je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, tak, že funkci f nahradíme jinou funkcí f_{obd}. Jelikož volíme funkci f_{obd} jako polynomiální, nejjednodušší možnost je použít polynom nejvýše nultého stupně (konstantní polynom), což lze zapsat jako

$$f_{obd}(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Konstantu c můžeme zvolit jako funkční hodnotu funkce f v libovolném, ale pevném bodě $\eta \in \langle a, b \rangle$, tj.

$$f_{obd}(x) = f(\eta).$$

Tento bod η se někdy volí jako jeden z krajních bodů intervalu $\langle a, b \rangle$. Zpravidla se ale používá hodnota uprostřed intervalu $\langle a, b \rangle$, tedy

$$\eta = \frac{a+b}{2}.$$

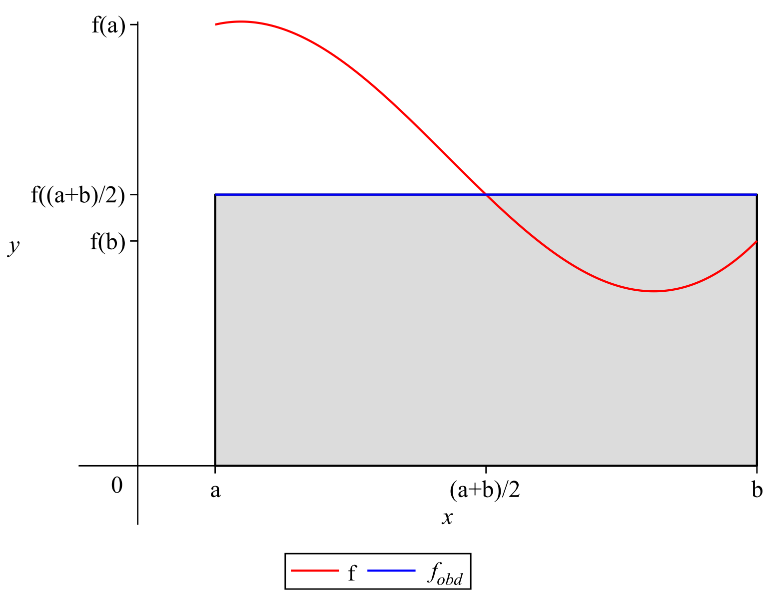
Integrál z funkce f_{obd} rozepíšeme jako

$$\int_a^b f_{obd}(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\ \mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)[x]_a^b = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Podoba výsledného vzorce je následující

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_{obd}(f,a,b)} + o_{obd}(f,a,b). \tag{2.1}$$

Pokud je funkce f_{obd} všude na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná, lze si všimnout, že plocha pod grafem funkce f_{obd} je obdélník. Proto vznikl název obdélníkové pravidlo. Grafická interpretace pravidla je v obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Obdélníkové pravidlo

2.3 Složené obdélníkové pravidlo

V praxi se častěji používá tzv. složené obdélníkové pravidlo. Interval $\langle a, b\rangle$ si rozdělíme na n stejně velkých podintervalů ($n \in \mathbb{N}$) o velikosti

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Krajní body těchto intervalů označíme $x_0, x_1, \dots, x_n$, kde

$$x_i = a + ih, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

To znamená, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, použijeme obdélníkové pravidlo. Výsledný výpočet zapíšeme

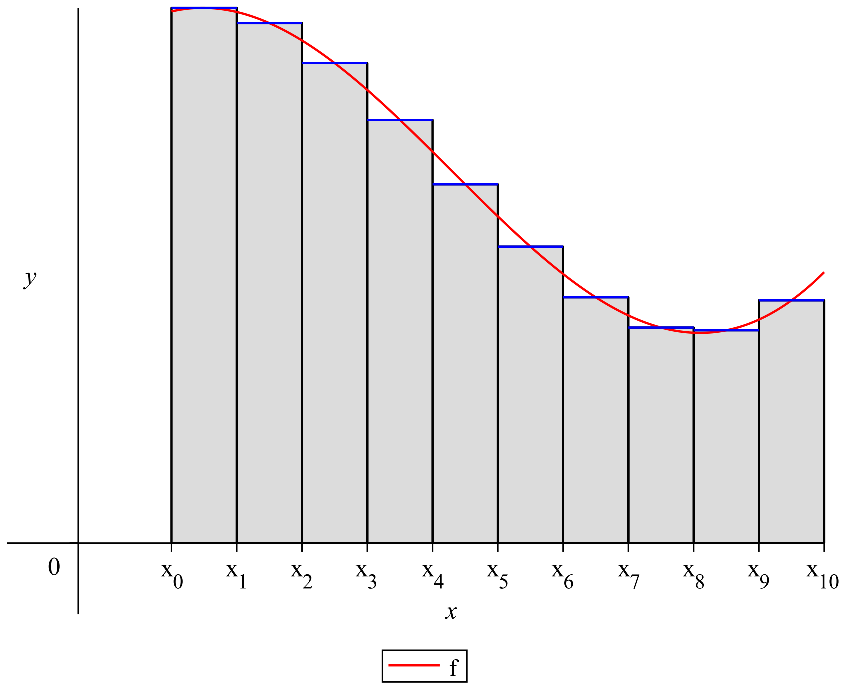
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{obd}(x)\ \mathrm{d}x + o_{obd}(f, x_{i-1}, x_i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(hf\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + o_{obd}(f, x_{i-1}, x_i) \right) = \underbrace{h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_{obd}(f,a,b,n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} o_{obd}(f, x_{i-1}, x_i)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} o_{obd}(f,a,b,n)}, \tag{2.2}$$

kde $O_{obd}(f, a, b, n)$ je vzorec složené metody a $o_{obd}(f, a, b, n)$ je chyba složeného obdélníkového pravidla. Zanedbáme-li chybu, dostaneme přibližnou rovnost pro výpočet integrálu funkce f, tedy

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx O_{obd}(f, a, b, n) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = h\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

Obrázek 2.2 ukazuje princip tohoto pravidla.



Obrázek 2.2: Složené obdélníkové pravidlo

Příklad 1

Pomocí složeného obdélníkového pravidla vypočtěte

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

kde interval $\langle 1, 3\rangle$ rozdělte na 4 stejné intervaly, tj.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pro krajní body x_i ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$) platí

$$x_i = a + ih.$$

$$x_0 = 1 + 0 \cdot 1 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2.5, \quad x_4 = 3,$$

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}\sin\left(\frac{5}{4}\right), \quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{4}{7}\sin\left(\frac{7}{4}\right),$$

$$f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) = f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{4}{9}\sin\left(\frac{9}{4}\right), \quad f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) = f\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{4}{11}\sin\left(\frac{11}{4}\right),$$

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\sin\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{4}{7}\sin\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{4}{9}\sin\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{4}{11}\sin\left(\frac{11}{4}\right)\right) = 0.903031.$$

Jelikož primitivní funkci k funkci f nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, nemůžeme výsledek porovnat s přesnou hodnotou. Program Maple nám hodnotu spočítal přibližně jako

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \approx 0.902570.$$

Pozn: Pokud bychom interval $\langle 1, 3\rangle$ rozdělili například na 6 stejně velkých podintervalů, dostali bychom

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \approx 0.902775.$$

■

2.4 Lichoběžníkové pravidlo

Při použití lichoběžníkového pravidla na intervalu $\langle a, b\rangle$ zvolíme za funkci f_{lich} polynom nejvýše prvního stupně. Tento polynom vytvoříme tak, aby se funkční hodnoty funkce f a f_{lich} shodovaly v krajních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$, tj.

$$f(a) = f_{lich}(a), \quad f(b) = f_{lich}(b).$$

Lineární funkce, jejíž graf prochází body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, má předpis

$$f_{lich}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

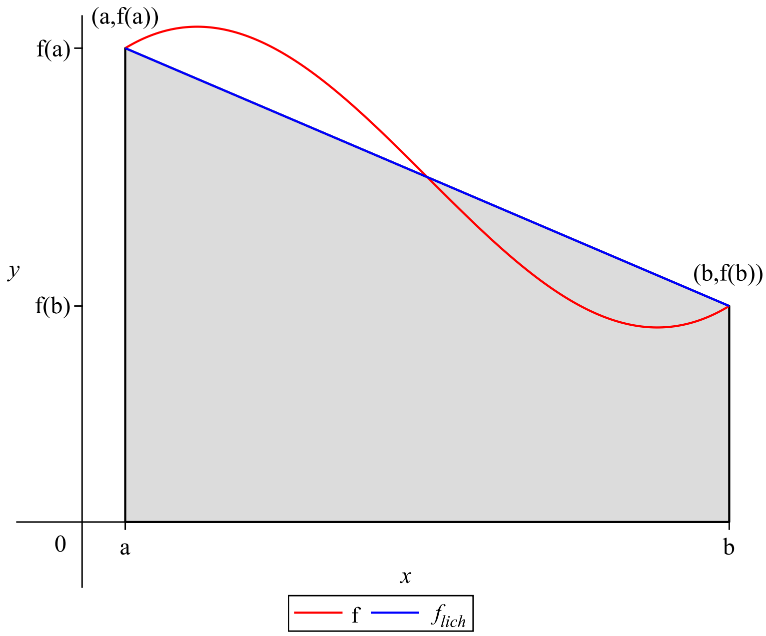
Integrál z funkce f_{lich} tedy zapíšeme jako

$$\int_a^b f_{lich}(x) \,\mathrm{d}x = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b + f(a)\,[x]_a^b = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

Výsledný vzorec zapíšeme jako

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_{lich}(f,a,b)} + o_{lich}(f, a, b). \tag{2.3}$$

Jelikož je graf funkce f_{lich} přímka, tak je plocha pod nezápornou funkcí f_{lich} lichoběžník (Obrázek 2.3), od toho vznikl název lichoběžníkové pravidlo.



Obrázek 2.3: Lichoběžníkové pravidlo

2.5 Složené lichoběžníkové pravidlo

Pro získání přesnější hodnoty integrálu si rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n stejně velkých podintervalů ($n \in \mathbb{N}$). Délka každého podintervalu je

$$h = \frac{b-a}{n}$$

a krajní body podintervalů označíme $x_0, x_1, \dots, x_n$, kde

$$x_i = a + ih, \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

To znamená, že

$$a = x_0 < x_1 < .. < x_{n-1} < x_n = b.$$

Složený vzorec lze zapsat jako

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{lich}(x)\ \mathrm{d}x + o_{lich}(f, x_{i-1}, x_i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(h \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n} o_{lich}(f, x_{i-1}, x_i) = \underbrace{h \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_{lich}(f,a,b,n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} o_{lich}(f, x_{i-1}, x_i)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} o_{lich}(f,a,b,n)}, \tag{2.4}$$

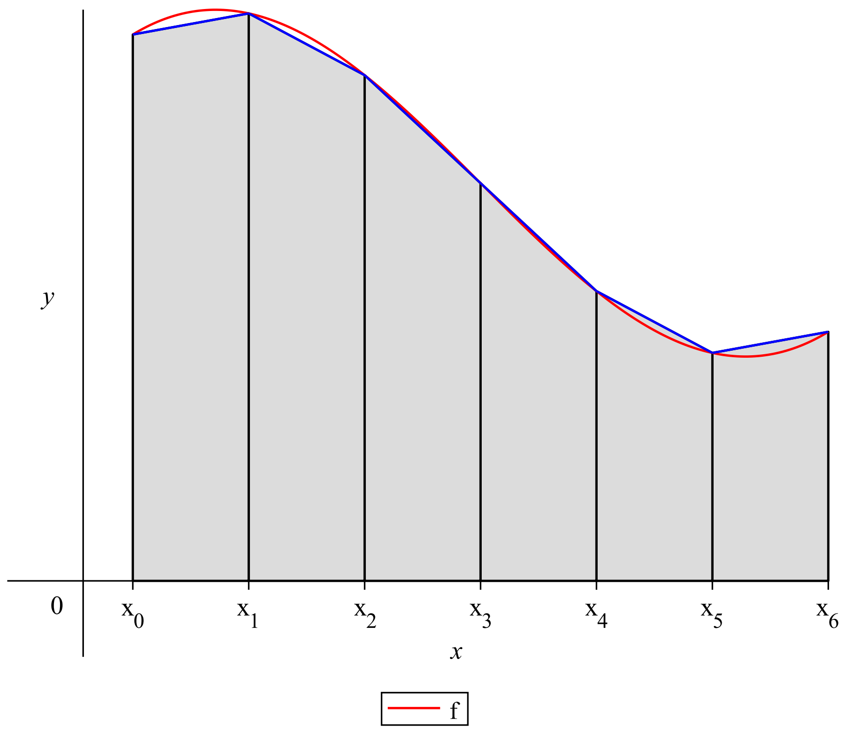
kde $O_{lich}(f,a,b,n)$ je předpis složeného lichoběžníkového pravidla a $o_{lich}(f,a,b,n)$ je chyba tohoto pravidla. Pro praktický výpočet zanedbáme chybu, neboli

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx O_{lich}(f,a,b,n) = h\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_{i-1})}{2}+\frac{f(x_i)}{2}\right),$$

což se dá přepsat jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx O_{lich}(f,a,b,n) = h\left(\frac{f(x_1)}{2}+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Princip složeného pravidla lze vidět na obrázku 2.4



Obrázek 2.4: Složené lichoběžníkové pravidlo

Příklad 2

Pomocí složeného lichoběžníkového pravidla vypočtěte

$$\int_{-3}^{3} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Interval $\langle -3, 3\rangle$ rozdělte na 3 stejně velké intervaly, tj.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{6}{3} = 2.$$

Vypočteme krajní body podintervalů x_i ($i \in \{0,1,2,3\}$)

$$x_0 = -3 + 0 \cdot 2 = -3, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3.$$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x \ \approx h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \frac{f(x_3)}{2}) = 2(\frac{e^{-(-3)^2}}{2} + e^{-(-1)^2} + e^{-(1^2)} + \frac{e^{-(3^2)}}{2}) =$$

$$= \frac{1}{e^9} + \frac{2}{e^1} + \frac{2}{e^1} + \frac{1}{e^9} \approx 1.471765.$$

Primitivní funkci k funkci f také nelze přesně vyjádřit. Program Maple vypočetl přibližnou hodnotu

$$\int_{-3}^{3} e^{-x^2}\mathrm{d}x \approx 1.772415.$$

Pozn: Pokud bychom interval $\langle -3, 3\rangle$ rozdělili například na 6 stejně velkých podintervalů, dostali bychom

$$\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x \ \approx 1.772514.$$

■

2.6 Simpsonovo pravidlo

U poslední uvedené metody nahradíme funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ funkcí f_{Simp}. Tuto funkci budeme volit jako polynom nejvýše druhého stupně, a to tak, aby se funkční hodnoty funkce f a f_{Simp} shodovaly v bodech a, $\frac{a+b}{2}$, b. Nyní se musíme opřít o interpolační polynomy, tedy polynomiální funkci, která v námi požadovaných bodech (interpolační body) bude nabývat stejné funkční hodnoty jako původní funkce f. Použijeme Lagrangeův interpolační polynom druhého stupně. Teorie pro určení Lagrangeova polynomu byla převzata z [2]. Tedy

$$f_{Simp}(x) = \sum_{k=0}^{2} f(z_k)L_k(x),$$

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{2} \frac{x - z_i}{z_k - z_i}.$$

Chceme, aby graf funkce f_{Simp} procházel body $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$, proto volíme interpolační body z_0, z_1, z_2 jako

$$z_0 = a, \quad z_1 = \frac{a+b}{2}, \quad z_2 = b.$$

Ty jsou od sebe stejně vzdálené o hodnotu s, pro kterou platí

$$s = z_2 - z_1 = z_1 - z_0 = \frac{b-a}{2}. \tag{2.5}$$

Nejdříve sestavíme jednotlivé $L_k(x)$,

$$L_0(x) = \frac{(x-z_1)}{(z_0-z_1)}\frac{(x-z_2)}{(z_0-z_2)} = \frac{1}{2s^2}(x^2 - x(z_1+z_2) + z_1z_2),$$

$$L_1(x) = \frac{(x-z_0)}{(z_1-z_0)}\frac{(x-z_2)}{(z_1-z_2)} = \frac{1}{-s^2}(x^2 - x(z_0+z_2) + z_0z_2),$$

$$L_2(x) = \frac{(x-z_0)}{(z_2-z_0)}\frac{(x-z_1)}{(z_2-z_1)} = \frac{1}{2s^2}(x^2 - x(z_0+z_1) + z_0z_1).$$

Funkce f_{Simp} bude tedy vypadat následovně

$$f_{Simp}(x) = f(z_0)\cdot L_0(x) + f(z_1)\cdot L_1(x) + f(z_2)\cdot L_2(x).$$

Integrál z této funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ zapíšeme jako

$$\int_a^b f_{Simp}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{z_0}^{z_2} \frac{f(z_0)}{2s^2}[x^2 - x(z_1+z_2) + z_1z_2] + \frac{f(z_1)}{-s^2}[x^2 - x(z_0+z_2) + z_0z_2] +$$

$$+\frac{f(z_2)}{2s^2}[x^2 - x(z_0+z_1) + z_0z_1]\ \mathrm{d}x.$$

Po rozdělení integrálu a vytknutí konstant spočteme jednotlivé integrály zvlášť

$$\int_{z_0}^{z_2}[x^2 - x(z_1+z_2) + z_1z_2]\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(z_1+z_2) + xz_1z_2\right]_{z_0}^{z_2} =$$

$$= \frac{z_2^3}{3} - \frac{z_0^3}{3} - \left(\frac{z_2^2}{2} - \frac{z_0^2}{2}\right)(z_1+z_2) + (z_2-z_0)z_1z_2.$$

Vhodnou úpravou se pokusíme zjednodušit poslední výraz. K tomu nám velice pomůže vztah (2.5)

$$\frac{1}{6}(z_2-z_0)[2(z_2^2 + z_2z_0 + z_0^2) - 3(z_2+z_0)(z_1+z_2) + 6z_1z_2] =$$

$$= \frac{1}{6}2s(2z_2^2 + 2z_2z_0 + 2z_0^2 - 3z_2z_1 - 3z_2^2 - 3z_0z_1 - 3z_0z_2 + 6z_1z_2) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2s(-z_2^2 - z_0z_2 + 2z_0^2 + 3z_2z_1 - 3z_0z_1) = \frac{1}{6}\cdot 2s((z_0^2 - z_2^2) + 3z_1(z_2-z_0) + z_0(z_0-z_2)) =$$

$$= \frac{1}{6}(2s)^2(-(z_0+z_2) + 3z_1 - z_0) = \frac{1}{6}\cdot 4s^2((2z_1 - 2z_0) + (z_1 - z_2)) = \frac{1}{6}\cdot 4s^2(2s - s)$$

a odtud

$$\int_{z_0}^{z_2} [x^2 - x(z_1 + z_2) + z_1 z_2] \; \mathrm{d}x = \frac{2}{3} s^3.$$

Stejný postup použijeme pro výpočet dalších dvou integrálů. Po úpravě bychom získali

$$\int_{z_0}^{z_2} [x^2 - x(z_0 + z_2) + z_0 z_2] \; \mathrm{d}x = ... = -\frac{4}{3} s^3,$$

$$\int_{z_0}^{z_2} [x^2 - x(z_0 + z_1) + z_0 z_1] \; \mathrm{d}x = ... = \frac{2}{3} s^3.$$

Můžeme již sepsat celý výpočet

$$\int_{z_0}^{z_2} f_{Simp}(x) \; \mathrm{d}x = \frac{f(z_0)}{2s^2} \frac{2}{3} s^3 + \frac{f(z_1)}{-s^2} (-\frac{4}{3} s^3) + \frac{f(z_2)}{2s^2} \frac{2}{3} s^3 = \frac{f(z_0) s}{3} + \frac{4 f(z_1) s}{3} + \frac{f(z_2) s}{3} =$$

$$= \frac{s}{3} (f(z_0) + 4 f(z_1) + f(z_2)).$$

Dosazením

$$s = \frac{b-a}{s}, \quad z_0 = a, \quad z_1 = \frac{a+b}{2}, \quad z_2 = b,$$

získáme výsledný vzorec

$$\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_{Simp}(f,a,b)} + o_{Simp}(f, a, b). \tag{2.6}$$

Grafem polynomu nejvýše druhého stupně je parabola, nebo přímka. Na obrázku 2.5 lze vidět princip Simpsonova pravidla.

2.7 Složené Simpsonovo pravidlo

Pro zvýšení přesnosti metody rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na n stejně velkých podintervalů ($n \in \mathbb{N}$). Každý podinterval má délku

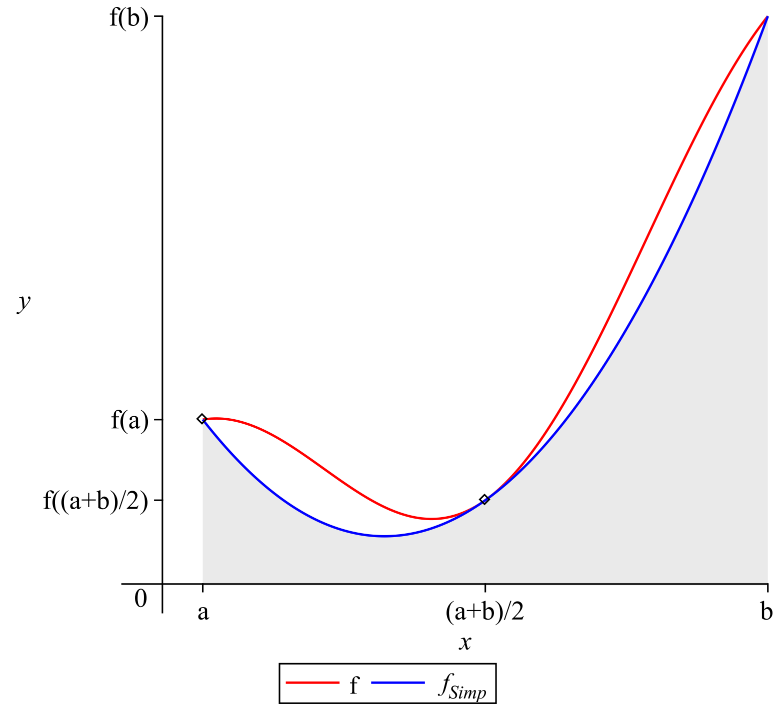
$$h = \frac{b-a}{n}$$

a koncové body intervalů označíme $x_0, x_1, \ldots, x_n$, kde

$$x_i = a + ih, \quad i \in \{0, \ldots, n\}. \tag{2.7}$$

Také platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Obrázek 2.5: Simpsonovo pravidlo

Na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle, i \in \{1, \ldots, n\}$, použijeme Simpsonovo pravidlo, tudíž

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{Simp}(x)\ \mathrm{d}x + o_{Simp}(f,a,b) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{6} \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) + \sum_{i=1}^{n} o_{Simp}(f,a,b) =$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} O_{Simp}(f,a,b,n)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} o_{Simp}(f,a,b)}_{\overset{\text{ozn.}}{=} o_{Simp}(f,a,b,n)}, \tag{2.8}$$

kde $O_{Simp}(f,a,b,n)$ je předpis složeného Simpsonova pravidla a $o_{Simp}(f,a,b,n)$ je chyba tohoto pravidla. Pro samotný výpočet zanedbáme chybu a vzorec zapíšeme jako

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx O_{Simp}(f,a,b,n) = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right),$$

což se dá rozepsat jako

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx O_{Simp}(f,a,b,n) = \frac{b-a}{6n}\left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \underbrace{f(x_1)+f(x_1)}_{2f(x_1)} + \ldots + f(x_n)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n)\right].$$

Příklad 3

Pomocí složeného Simpsonova pravidla vypočtěte přibližnou hodnotu

$$\int_1^4 \sin(x^2-6x)\mathrm{d}x.$$

Interval $\langle 1, 4\rangle$ rozdělte na 3 podintervaly, tedy $n = 3$ b($h = 1$). Krajní body podintervalů tedy jsou

$$x_0 = 1 + 0\cdot 1 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4.$$

Podle vzorce pro složené Simpsonovo pravidlo

$$O_{Simp}(f,1,4,3) = \frac{3}{6\cdot 3}\left[f(1) + 4f(1.5) + 2f(2) + 4f(2.5) + 2f(3) + 4f(3.5) + f(4)\right],$$

$$\int_1^4 \sin(x^2-6x)\mathrm{d}x \approx -1.605226.$$

I tento integrál nelze spočíst přesně, proto jsme v programu Maple spočítali přibližnou hodnotu

$$\int_1^4 \sin(x^2-6x)\mathrm{d}x \approx -1.578900.$$

Pozn: Pokud bychom interval $\langle 1, 4\rangle$ rozdělili například na 6 stejně velkých podintervalů, dostali bychom

$$\int_1^4 \sin(x^2-6x)\mathrm{d}x \approx -1.579758.$$

■

Kapitola 3

Chyby jednotlivých metod

Při použití numerických výpočtů se zpravidla dopustíme chyby. Pokud nevíme, jestli jsme se při výpočtu odchýlili od původní hodnoty o pár desetinných míst, nebo o tisíce jednotek, je nám samotný výpočet k ničemu. Jelikož nelze chybu určit vždy přesně, potřebujeme alespoň její odhad, garantující požadovanou přesnost.

Chybu metody M označujeme $o_M(f,a,b)$. Tu můžeme vyjádřit jako rozdíl integrálu z původní funkce f a integrálu z náhradní funkce f_M, tj.

$$o_M(f,a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \underbrace{\int_a^b f_M(x)\mathrm{d}x}_{=\ O_M(f,a,b)}.$$

Při odvozování chyby každého pravidla jsem čerpal z [1, 3, 4].

3.1 Chyba obdélníkového pravidla

Věta 1 *Nechť $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$. Pak platí*

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : o_{obd}(f,a,b) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \tag{3.1}$$

Důkaz Z rovnosti (2.1) vyjádříme chybu pravidla

$$o_{obd}(f,a,b) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Zavedeme si pomocnou funkci g předpisem

$$g(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\mathrm{d}x - 2tf(c), \quad t \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle,$$

kde $c = \frac{a+b}{2}$. Pokud do funkce g dosadíme hodnotu $\frac{b-a}{2}$, dostaneme

$$g\left(\frac{b-a}{2}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) = o_{obd}(f,a,b).$$

Funkce g v tomto bodě přesně vyjadřuje hledanou chybu. Tento krok jsme udělali, abychom mohli z vlastností funkce g zjistit, jak se chová samotná chyba. Určíme první až třetí derivaci funkce g

$$g'(t) = f(c+t) + f(c-t) - 2f(c),$$

$$g''(t) = f'(c+t) - f'(c-t),$$

$$g'''(t) = f''(c+t) + f''(c-t).$$

Všimněme si, že platí

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0.$$

Třetí derivace funkce g již v bodě 0 nulová není. Zavedeme si čísla M a m jako

$$M = \max_{x \in \langle a,b \rangle} f''(x), \quad m = \min_{x \in \langle a,b \rangle} f''(x). \tag{3.2}$$

Jelikož $g'''(t)$ je součet druhých derivací funkce f ve dvou bodech, na intervalu $\langle a,b \rangle$, víme s určitostí, že hodnota $g'''(t)$ bude vždy mezi čísly $2m$ a $2M$. Dostáváme tedy

$$\forall t \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle: \; 2m \leq g'''(t) \leq 2M. \tag{3.3}$$

Nyní zintegrujeme (3.3) od 0 do s, kde $s \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle$,

$$\int_0^s 2m \; \mathrm{d}t \leq \int_0^s g'''(t) \; \mathrm{d}t \leq \int_0^s 2M \mathrm{d}t,$$

$$2ms \leq g''(s) - \underbrace{g''(0)}_{=0} \leq 2Ms. \tag{3.4}$$

Znovu zintegrujeme vzniklou nerovnost (3.4) od 0 do u, kde $u \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle$,

$$\int_0^u 2ms \; \mathrm{d}s \leq \int_0^u g''(s) \; \mathrm{d}s \leq \int_0^u 2Ms \; \mathrm{d}s,$$

$$mu^2 \leq g'(u) - \underbrace{g'(0)}_{=0} \leq Mu^2. \tag{3.5}$$

Zintegrujeme poslední nerovnosti (3.5), tentokrát ale od 0 do $\frac{b-a}{2}$

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} mu^2 \text{ d}u \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} g'(u) \text{ d}u \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} mu^2 \text{ d}u,$$

$$\frac{m\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3} \leq g\left(\frac{b-a}{2}\right) - \underbrace{g(0)}_{=0} \leq \frac{M\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3}.$$

Jelikož $g(\frac{b-a}{2}) = o_{obd}(f,a,b)$, dostaneme

$$m \leq \frac{24 o_{obd}(f,a,b)}{(b-a)^3} \leq M.$$

Ze vztahů (3.2) a ze spojitosti f'' na intervalu $\langle a,b\rangle$ víme, že

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : f''(\xi) = \frac{24 o_{obd}(f,a,b)}{(b-a)^3},$$

a proto

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : o_{obd}(f,a,b) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

■

Důsledek *Je-li $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$, pak*

$$|o_{obd}(f,a,b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz Z věty 1 víme, že existuje bod $\xi \in \langle a,b\rangle$ takový, že platí (3.1). Uvědomme si, že platí

$$|f''(\xi)| \leq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|,$$

a odtud

$$|o_{obd}(f,a,b)| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

■

3.2 Chyba složeného obdélníkového pravidla

Pro složené obdélníkové pravidlo platí následující věta

Věta 2 *Nechť funkce $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak existují body $\xi_1, \dots, \xi_n$ takové, že $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$(body $x_0, x_1, \dots, x_n$ byly zavedeny v kapitole 2.3) a*

$$o_{obd}(f, a, b, n) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Důkaz Z rovnosti (2.2) víme, že chyba složeného obdélníkového pravidla se bude rovnat součtu chyb obdélníkového pravidla na jednotlivých intervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Tudíž můžeme z věty 1 odvodit, že existují body $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle, i \in \{1, \dots, n\}$, pro které platí

$$o_{obd}(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} o_{obd}(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{24} f''(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\frac{b-a}{n})^3}{24} f''(\xi_i) =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

■

Důsledek *Je-li funkce $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$, pak platí*

$$|o_{obd}(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz Nechť body $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ jsou body z věty 2. Protože platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : |f''(\xi_i)| \leq \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|,$$

dostaneme

$$|o_{obd}(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|. \tag{3.6}$$

■

Příklad 4

Odhadněte chybu složeného obdélníkového pravidla z vypočteného příkladu 1. Pro připomenutí se počítal integrál z funkce $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ na intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Tento interval se rozdělil na 4 stejně velké díly ($n = 4$) a po vypočtení nám vyšla hodnota

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \approx 0.903031.$$

Funkce je třídy $C^2(\langle 1,3\rangle)$, proto použijeme vztah (3.6). Nejdříve určíme první a druhou derivaci funkce f

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^3}.$$

Jelikož určení maxima funkce $|f''|$ na $\langle a,b\rangle$ by bylo velice složité, můžeme si pomoct následujícím odhadem

$$|f''(x)| = \left| -\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| + \left| \frac{2\cos x}{x^2} \right| + \left| \frac{2\sin x}{x^3} \right|.$$

Jelikož jsme na intervalu $\langle 1,3\rangle$, tak

$$|f''(x)| \leq \frac{|\sin x|}{x} + \frac{|2\cos x|}{x^2} + \frac{|2\sin x|}{x^3} \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \leq \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 5.$$

Díky tomu víme, že

$$\max_{x\in\langle 1,3\rangle} |f''(x)| \leq 5.$$

Po dosazení do vzorce (3.6)

$$|o_{obd}(f,1,3,4)| \leq \frac{(3-1)^3}{24\cdot 4^2} \max_{x\in\langle 1,3\rangle} |f''(x)| \leq \frac{8}{24\cdot 4^2}\cdot 5 = 0.104167.$$

Chyba složeného obdélníkového pravidla bude v našem případě menší než 0.104167. ■

3.3 Chyba lichoběžníkového pravidla

Při určování chyby lichoběžníkového pravidla použijeme podobný postup.

Věta 3 *Nechť $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$. Pak platí*

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : o_{lich}(f,a,b) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

Před důkazem si uvedeme pomocnou větu, která se nám bude hodit i v pozdějších kapitolách. Její znění i důkaz lze nalézt v [5].

Věta 4 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci. Pak existuje bod $\gamma \in (a,b)$ takový, že*

$$f'(\gamma) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

neboli

$$f(b) - f(a) = f'(\gamma)\ (b-a). \tag{3.7}$$

Nyní uvedeme důkaz věty 3.

Důkaz Chybu tohoto pravidla získáme z rovnosti (2.3), tudíž

$$o_{lich}(f,a,b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

Definujeme pomocnou funkci g předpisem

$$g(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\mathrm{d}x - t(f(c-t)+f(c+t)) \quad t \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle,$$

kde $c = \frac{a+b}{2}$. Všimněme si, že

$$g\left(\frac{b-a}{2}\right) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = o_{lich}(f,a,b)$$

je námi požadovaná chyba. Zderivujeme funkci g do druhé derivace,

$$g'(t) = t(f'(c-t) - f'(c+t)),$$

$$g''(t) = f'(c-t) - f'(c+t) + t(-f''(c-t) - f''(c+t)). \tag{3.8}$$

K tomu si lze povšimnout, že

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Spočtení třetí derivace by bylo mírně složitější, můžeme se zde ale opřít o větu 4. Dle (3.7) tedy rovnost (3.8) upravíme na

$$-g''(t) = f'(c+t) - f'(c-t) + t(f''(c-t) + f''(c+t)),$$

$$-g''(t) = 2tf''(\gamma) + t(f''(c-t) + f''(c+t)), \quad \gamma \in \langle c-t, c+t\rangle \subset \langle a,b\rangle.$$

Položme

$$m = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f''(x), \quad M = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f''(x). \tag{3.9}$$

Můžeme odvodit následující nerovnosti

$$\forall t \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle : 4tm \leq -g''(t) \leq 4tM.$$

Zintegrujeme tuto nerovnost od 0 do s, kde $s \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle$, tudíž

$$\int_0^s 4tm\ \mathrm{d}t \leq \int_0^s -g''(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^s 4tM\ \mathrm{d}t,$$

$$2s^2m \leq -g'(s) + \underbrace{g'(0)}_{=0} \leq 2s^2M. \tag{3.10}$$

Zintegrováním nerovnosti (3.10), tentokrát od 0 do $\frac{b-a}{2}$, dostaneme

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} 2s^2m \, \mathrm{d}s \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} -g'(s) \, \mathrm{d}s \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2s^2M \, \mathrm{d}s,$$

$$\frac{2(\frac{b-a}{2})^3m}{3} \leq -g\left(\frac{b-a}{2}\right) + \underbrace{g(0)}_{=0} \leq \frac{2(\frac{b-a}{2})^3M}{3},$$

$$\frac{(b-a)^3m}{12} \leq -g\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{(b-a)^3M}{12}.$$

Po dosazení $g(\frac{b-a}{2}) = o_{lich}(f,a,b)$ získáme

$$m \leq -\frac{12o_{lich}(f,a,b)}{(b-a)^3} \leq M.$$

Podle (3.9) a ze spojitosti funkce f'' víme, že musí existovat bod $\xi \in \langle a,b\rangle$ takový, že

$$f''(\xi) = -\frac{12\ o_{lich}(f,a,b)}{(b-a)^3}.$$

Výslednou chybu vyjádříme jako

$$o_{lich}(f,a,b) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi). \tag{3.11}$$

■

Důsledek *Je-li* $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$, *pak*

$$|o_{lich}(f,a,b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz Víme, že pro $\xi \in \langle a,b\rangle$ platí

$$|f''(\xi)| \leq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Z právě zmíněného vztahu a z věty 3 můžeme tvrdit, že

$$|o_{lich}(f,a,b)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

■

3.4 Chyba složeného lichoběžníkového pravidla

Pro složené lichoběžníkové pravidlo platí následující věta.

Věta 5 *Nechť funkce $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak existují body $\xi_1, \ldots, \xi_n$ takové, že $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$: $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$(body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ byly zavedeny v kapitole 2.5) a*

$$o_{lich}(f, a, b, n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Důkaz Z rovnosti (2.4) víme, že chyba složeného lichoběžníkového pravidla se dá vyjádřit jako součet chyb lichoběžníkového pravidla na jednotlivých podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Z věty 3 víme, že na každém takovém podintervalu existuje bod $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle, i \in \{1, \ldots, n\}$, takový, že platí

$$o_{lich}(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} o_{lich}(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^{n} -f''(\xi_i)\frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} = \sum_{i=1}^{n} -f''(\xi_i)\frac{(\frac{b-a}{n})^3}{12} =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i). \tag{3.12}$$

■

Důsledek *Je-li funkce $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$, pak platí*

$$|o_{lich}(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz Nechť body $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ jsou body z věty 5. Protože platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : |f''(\xi_i)| \leq \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|,$$

tak rovnost (3.12) můžeme upravit na

$$|o_{lich}(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^3} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|. \tag{3.13}$$

■

Příklad 5
V příkladu 2 jsme se pokoušeli vypočítat integrál z funkce $f(x) = e^{-x^2}$ na intervalu $\langle -3, 3\rangle$. Určete na kolik dílků musíme rozdělit interval $\langle -3, 3\rangle$, pokud chceme, aby chyba vzniklá při použití složeného lichoběžníkového pravidla, nebyla větší než 10^{-1}.

Jelikož $f \in C^2(\langle -3, 3\rangle)$, tak můžeme použít vztah (3.13). Nejdříve určíme první a druhou derivaci funkce f.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}.$$

Následně musíme určit $\max_{x\in\langle -3,3\rangle} |f''(x)|$. Toto maximum lze poměrně jednoduše určit pomocí klasických metod pro hledání extrémů. Platí, že

$$\max_{x\in\langle -3,3\rangle} |f''(x)| = 2.$$

Víme, že

$$|o_{lich}(f, -3, 3, n)| \leq \frac{(3-(-3))^3}{12\cdot n^2} \max_{x\in\langle -3,3\rangle} |f''(x)| = \frac{6^3}{12n^2}\cdot 2 = \frac{36}{n^2}.$$

Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$ tak, aby platila nerovnost $\frac{36}{n^2} < 10^{-1}$, budeme mít zaručeno, že chyba bude menší než 10^{-1}. Snadno zjistíme, že stačí zvolit $n = 19$. ∎

3.5 Chyba Simpsonova pravidla

Věta 6 *Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$. Pak platí*

$$\exists \xi \in \langle a, b\rangle : o_{Simp}(f, a, b) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

Důkaz Z rovnosti (2.6) vyjádříme chybu Simpsonova pravidla

$$o_{Simp}(f, a, b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zavedeme pomocnou funkci g předpisem

$$g(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\mathrm{d}x - \frac{t}{3}(f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)), \quad t \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2}\right\rangle,$$

kde $c = \frac{a+b}{2}$. Všimněme si, že

$$g\left(\frac{b-a}{2}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = o_{Simp}(f, a, b).$$

Zderivujeme pomocnou funkci g až do třetí derivace.
První derivace

$$g'(t) = f(c+t) + f(c-t) - \frac{f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)}{3} - \frac{t(-f'(c-t) + f'(c+t))}{3} =$$

$$= \frac{2f(c-t)}{3} + \frac{2f(c+t)}{3} - \frac{4f(c)}{3} + \frac{tf'(c-t)}{3} - \frac{tf'(c+t)}{3}.$$

Druhá derivace

$$g''(t) = -\frac{2f'(c-t)}{3} + \frac{2f'(c+t)}{3} + \frac{f'(c-t)}{3} - \frac{tf''(c-t)}{3} - \frac{f'(c+t)}{3} - \frac{tf''(c+t)}{3} =$$

$$= \frac{f'(c+t)}{3} - \frac{f'(c-t)}{3} - \frac{tf''(c-t)}{3} - \frac{tf''(c+t)}{3}.$$

Třetí derivace

$$g'''(t) = \frac{f''(c+t)}{3} + \frac{f''(c-t)}{3} - \frac{f''(c-t)}{3} + \frac{tf'''(c-t)}{3} - \frac{f''(c+t)}{3} - \frac{tf'''(c+t)}{3} =$$

$$= \frac{tf'''(c-t)}{3} - \frac{tf'''(c+t)}{3} = -\left(\frac{tf'''(c+t)}{3} - \frac{tf'''(c-t)}{3}\right) = -\frac{t}{3}(f'''(c+t) - f'''(c-t)). \quad (3.14)$$

Všimněme si, že

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0.$$

Z věty 4 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) a z rovnosti (3.14) víme, že existuje bod γ takový, že

$$-g'''(t) = \frac{2t^2}{3} f^{(4)}(\gamma), \quad \gamma \in \langle c-t, c+t \rangle \subset \langle a, b \rangle.$$

Položme

$$m = \min_{x \in \langle a,b \rangle} f^{(4)}(x), \quad M = \max_{x \in \langle a,b \rangle} f^{(4)}(x). \quad (3.15)$$

Díky vlastnostem m a M můžeme odvodit následující nerovnost

$$\frac{2t^2}{3} m \leq -g'''(t) \leq \frac{2t^2}{3} M. \quad (3.16)$$

Integrací nerovnosti (3.16) od 0 do s, kde $s \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle$, získáme

$$\int_0^s \frac{2t^2}{3} m \ \mathrm{d}t \leq -\int_0^s g'''(t) \ \mathrm{d}t \leq \int_0^s \frac{2t^2}{3} M \ \mathrm{d}t,$$

$$\frac{2s^3 m}{9} \leq -g''(s) + \underbrace{g''(0)}_{=0} \leq \frac{2s^3 M}{9}. \quad (3.17)$$

Nerovnost (3.17) zintegrujeme, nyní od 0 do u, kde $u \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2} \right\rangle$,

$$\int_0^u \frac{2s^3 m}{9} \ \mathrm{d}s \leq -\int_0^u g''(s) \ \mathrm{d}s \leq \int_0^u \frac{2s^3 M}{9} \ \mathrm{d}s,$$

$$\frac{2u^4m}{36} \leq -g'(u) + \underbrace{g'(0)}_{=0} \leq \frac{2u^4M}{36}. \tag{3.18}$$

Poslední integrací nerovnosti (3.18), již přímo od 0 do $\frac{b-a}{2}$, dostaneme

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{u^4m}{18}\,\mathrm{d}u \leq -\int_0^{\frac{b-a}{2}} g'(u)\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{u^4M}{18}\,\mathrm{d}u,$$

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{m}{90} \leq -g\left(\frac{b-a}{2}\right) + \underbrace{g(0)}_{=0} \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M}{90}.$$

Jelikož $g(\frac{b-a}{2}) = o_{Simp}(f,a,b)$, tak

$$m \leq -\frac{2880 o_{Simp}(f,a,b)}{(b-a)^5} \leq M.$$

Podle (3.15) a ze spojitosti funkce $f^{(4)}$ musí existovat bod $\xi \in \langle a,b\rangle$ takový, že

$$f^{(4)}(\xi) = -\frac{2880 o_{Simp}(f,a,b)}{(b-a)^5}.$$

Chybu tedy zapíšeme výrazem

$$o_{Simp}(f,a,b) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi). \tag{3.19}$$

■

Důsledek *Je-li $f \in C^4(\langle a,b\rangle)$, pak*

$$|o_{Simp}(f,a,b)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Důkaz Víme, že pro $\xi \in \langle a,b\rangle$ platí

$$|f^{(4)}(\xi)| \leq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Z věty 6 a právě zmíněné nerovnosti musí platit

$$|o_{Simp}(f,a,b)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

■

3.6 Chyba složeného Simpsonova pravidla

Pro složené Simpsonovo pravidlo platí následující věta

Věta 7 *Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak existují body $\xi_1, \ldots, \xi_n$ takové, že $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$(body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ byly zavedeny v kapitole 2.7) a*

$$o_{Simp}(f, a, b, n) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i).$$

Důkaz Z rovnosti (2.8) víme, že chyba složeného Simpsonova pravidla je rovna součtu chyb na jednotlivých podintervalech $\langle x_{i-1}, x_i\rangle, i \in \{1, \ldots, n\}$. K tomu dle věty 6 víme, že na každém podintervalu existuje bod $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takový, že

$$o_{Simp}(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^{n} o_{Simp}(f, x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^{n} -f^{(4)}(\xi_i)\frac{(x_i - x_{i-1})^5}{2880} = \sum_{i=1}^{n} -f^{(4)}(\xi_i)\frac{(\frac{b-a}{n})^5}{2880} =$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i).$$

■

Důsledek *Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$|o_{Simp}(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Důkaz Nechť body $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ jsou body z věty 7. Jelikož platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : |f^{(4)}(\xi_i)| \leq \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f^{(4)}(x)|,$$

tak z věty 7 a z právě zmíněné nerovnosti můžeme odvodit

$$|o_{Simp}(f, a, b, n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880\ n^5} \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f^{(4)}(x)| = \frac{(b-a)^5}{2880\ n^5} \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f^{(4)}(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$= \frac{(b-a)^5}{2880\ n^4} \max_{x \in \langle a, b\rangle} |f^{(4)}(x)|. \tag{3.20}$$

■

Příklad 6

Vraťme se k příkladu 3, ve kterém jsme počítali integrál z funkce $f(x) = \sin(x^2 - 6x)$ pomocí složené Simpsonovy metody, na intervalu $\langle 1, 4\rangle$. Interval byl rozdělen na 3 podintervaly ($n = 3$). Při výpočtu nám vyšel výsledek

$$\int_1^4 \sin(x^2 - 6x)\ \mathrm{d}x \approx -1.605229.$$

Odhadněte interval, ve kterém se nachází přesná hodnota tohoto integrálu. Jelikož je $f \in C^4(\langle 1, 4\rangle)$, můžeme použít vztah (3.20). Nejdříve spočteme jednotlivé derivace funkce f

$$f'(x) = (2x-6)\cos(x^2-6x), \quad f''(x) = 2\cos(x^2-6x) - (2x-6)^2\sin(x^2-6x),$$

$$f'''(x) = -6(2x-6)\sin(x^2-6x) - (2x-6)^3\cos(x^2-6x),$$

$$f^{(4)}(x) = -12\sin(x^2-6x) - 12(2x-6)^2\cos(x^2-6x) + (2x-6)^4\sin(x^2-6x).$$

Maximum čtvrté derivace určíme s pomocí programu Maple,

$$\max_{x\in\langle 1,4\rangle} |f^{(4)}(x)| = 179.514383.$$

$$|o_{Simp}(f, 1, 4, 3)| \leq \frac{(4-1)^5}{2880\cdot 3^4} \max_{x\in\langle 1,4\rangle} |f^{(4)}(x)| = \frac{3^5}{2880\cdot 3^4}\cdot 179.514383 = 0.186994.$$

Interval, kde se určitě nachází hodnota integrálu je tedy $\langle -1.792220, -1.418232\rangle$. ■

Kapitola 4

Další využití metod

Zavedené metody se dají většinou využít pro vypočtení hodnoty určitého integrálu, případně, při správném použití, na výpočet obsahu různých ploch. Jednotlivé vzorce ale mohou mít při správné transformaci zcela jiné využití. Uvedeme příklad, kde se nám bude jedna ze zmiňovaných metod hodit k odhadu faktoriálu. Při psaní této kapitoly jsem vycházel z [1, 6, 7, 8]

4.1 Odhad faktoriálu

K odhadu faktoriálu nám poslouží lichoběžníkové pravidlo a znalost jeho chyby. Zvolíme $f(x) = \ln x$ a interval $\langle a, b\rangle$ jako $\langle 1, n\rangle$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Víme, že $f \in C^2(\langle 1, n\rangle)$, neboť

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Interval $\langle 1, n\rangle$ rozdělíme na $(n-1)$ podintervalů (délky $h = 1$). Ze vztahu (2.4) (složené lichoběžníkové pravidlo) můžeme integrál rozepsat jako

$$\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{\ln 1}{2} + \ln 2 + \ldots \ln(n-1) + \frac{\ln n}{2} + o_{lich}(f, a, b, n-1).$$

Rovnost lehce upravíme a díky větě 5 můžeme napsat

$$\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x + \frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln n}{2} = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n - \frac{(n-1)^3}{12\ (n-1)^3} \sum_{i=1}^{n-1} f''(\xi_i),$$

kde

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} : \xi_i \in \langle i, i+1\rangle,$$

a použijeme pravidla pro práci s logaritmy

$$\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x + \frac{\ln n}{2} = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n) + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_i^2}.$$

Nakonec spočteme metodou per-partes určitý integrál $\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x$

$$n \cdot \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} = \ln n! + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_i^2}.$$

Jednoduchou úpravou obdržíme

$$\ln \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e \sqrt{n}} \right) = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_i^2}. \tag{4.1}$$

Nyní se pokusíme odhadnout výsledek sumy na pravé straně rovnosti (4.1).

Lemma 1 *Pokud si rozdělíme interval $\langle 1, n \rangle$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, na $(n-1)$ stejně velkých podintervalů a z každého podintervalu vezmeme jakýkoliv bod ξ_i (tj. $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \xi_i \in \langle i, i+1 \rangle$), pak*

$$\frac{1}{4} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{{\xi_i}^2} \leq 2.$$

Důkaz Vzhledem k předpokladům, každý bod ξ_i, kde $i \in \{1, \dots, n-1\}$, je z intervalu $\langle i, i+1 \rangle$. Zřejmě platí

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{{\xi_i}^2} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}. \tag{4.2}$$

Nejmenší výsledek sumy $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}$ bude pro $n = 2$. Při zvětšení n vždy přičítáme kladné číslo, proto

$$\frac{1}{4} \leq \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}. \tag{4.3}$$

Druhou dokazovanou nerovnost získáme z rozepsání $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}$. Zatím pro $n \geq 3$ platí, že

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right).$$

Protože se nám většina členů ve výše uvedeném součtu odečte, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1} \leq 2. \tag{4.4}$$

Dosazením zjistíme, že zmíněná nerovnost platí i pro $n = 2$. Kombinací (4.2), (4.3) a (4.4) získáme požadovanou nerovnost. ■

Díky získanému odhadu z rovnosti (4.1) plynou nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : -\frac{1}{4 \cdot 12} \geq \ln \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{n}} \right) \geq -\frac{2}{12}.$$

Odtud (pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

$$\ln(e^{-\frac{1}{48}}) \geq \ln \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{n}} \right) \geq \ln(e^{-\frac{1}{6}}),$$

$$e^{-\frac{1}{48}} e \geq \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \geq e^{-\frac{1}{6}} e. \tag{4.5}$$

Po úpravě získáme nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : e^{-\frac{1}{6}} e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e^{-\frac{1}{48}} e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{4.6}$$

Faktoriál máme omezen. Zatímco při normálním výpočtu faktoriálu musíme algoritmem postupně násobit čísla od 1 do n, nyní nám stačí pouze pár operací.

Můžeme se navíc pokusit nalézt funkci, se kterou bude mít $n!$ stejný řádový růst. Tuto funkci jsme již získali právě díky nerovnostem (4.6). Faktoriál roste řádově stejně rychle jako $\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

4.2 Přesnější odhad faktoriálu

Předchozí odhad nám poslouží jako základ pro důkaz mnohem přesnějšího odhadu. Platí následující věta.

Věta 8 *Existuje konstanta $a \in \mathbb{R}^+$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí*

$$a \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\; e^{\frac{1}{12(n+1)}} \leq n! \leq a \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\; e^{\frac{1}{12(n-1)}}. \tag{4.7}$$

Důkaz Definujeme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}.$$

Dle rovnosti (4.1) můžeme o této posloupnosti říct, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \ln\left(\frac{a_n}{e}\right) = -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_i^2}, \quad \xi_i \in \langle i, i+1\rangle.$$

Po lehké úpravě získáme

$$a_n = e \cdot e^{-\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\xi_i^2}}.$$

Pro podíl dvou po sobě následujících členů posloupnosti (a_n) platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{1}{12\xi_n^2}}.$$

Jelikož je $\xi_n \in \langle n, n+1\rangle$, můžeme odvodit následující nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : e^{-\frac{1}{12n^2}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq e^{-\frac{1}{12(n+1)^2}} < 1. \tag{4.8}$$

Protože je podíl sousedních členů posloupnosti kladných čísel menší než 1, musí být tato posloupnost od druhého členu klesající. Protože se jedná o posloupnost kladných čísel, je tato posloupnost zdola omezená a tedy konvergentní. Vzhledem k (4.5) je

$$\lim a_n = a \in \mathbb{R}^+.$$

Později odvodíme, čemu se zmíněná limita rovná. Sestrojíme druhou posloupnost

$$b_n = a_n e^{-\frac{1}{12(n-1)}}$$

a zjistíme, čemu se rovná podíl dvou následujících členů. Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{-\frac{1}{12n}} e^{\frac{1}{12(n-1)}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{\frac{1}{12n(n-1)}}.$$

Z (4.8) můžeme odvodit nerovnost

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{\frac{1}{12n(n-1)}} \geq e^{-\frac{1}{12n^2}} e^{\frac{1}{12n(n-1)}} = e^{\frac{1}{12n}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{1}{12n^2(n-1)}} > 1.$$

Jelikož je podíl členů posloupnosti (b_n) větší než 1, je posloupnost (b_n) od druhého členu rostoucí. K tomu si můžeme všimnout, že

$$\lim b_n = \lim a_n \lim e^{-\frac{1}{12(n-1)}} = \lim a_n = a.$$

Zkonstruujeme další posloupnost

$$c_n = a_n e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Stejným postupem prověříme monotonii posloupnosti c_n. Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{-\frac{1}{12(n+2)}} e^{\frac{1}{12(n+1)}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}.$$

Z (4.8) dostaneme nerovnost

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)} \leq e^{-\frac{1}{12(n+1)^2}} e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)} = e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\right)} < 1.$$

Díky tomu, že je podíl členů posloupnosti menší než 1 a členy této posloupnosti jsou kladné, víme, že je posloupnost (c_n) klesající od druhého členu. Pro tuto posloupnost navíc platí, že

$$\lim c_n = \lim a_n \lim e^{-\frac{1}{12(n+1)}} = \lim a_n = a.$$

Jelikož je posloupnost $(b_n)_2^\infty$ rostoucí, posloupnost $(c_n)_2^\infty$ klesající a obě tyto posloupnosti mají stejnou limitu a, dostaneme ihned nerovnost

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : b_n \leq a \leq c_n.$$

Po rozepsání získáme

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} e^{-\frac{1}{12(n-1)}} \leq a \leq \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

odtud po osamostatnění $n!$

$$a \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^{\frac{1}{12(n+1)}} \leq n! \leq a \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^{\frac{1}{12(n-1)}}. \tag{4.9}$$

■

Nyní se budeme snažit určit hodnotu a, neboli spočíst $\lim a_n$. Pro odvození následující věty jsem čerpal z [6, 7, 8]. Platí následující věta.

Věta 9 (Stirlingův vzorec) *Mějme posloupnost (a_n) definovanou předpisem*

$$a_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}. \tag{4.10}$$

Pak

$$\lim a_n = \sqrt{2\pi}.$$

Pozn: Ve většině literatury se uvádí Stirlingův vzorec jako

$$\lim \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Pro důkaz věty 9 budeme potřebovat následující tvrzení. Pro odvození této pomocné věty jsem čerpal z [5, 6].

Lemma 2 (Wallisova formule) *Platí*

$$\lim \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ se pokusíme spočíst následující integrál pomocí metody per-partes

$$\int_0^\pi \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^\pi (\sin^{n-1} x \sin x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{\left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi \Big((n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \Big) \, \mathrm{d}x =$$

$$= (n-1) \int_0^\pi \Big(\sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \Big) \mathrm{d}x = (n-1) \int_0^\pi (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \, \mathrm{d}x.$$

Po převedení integrálu $\sin^n x$ na jednu stranu získáme rekurzivní vztah (platný pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

$$\int_0^\pi \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Platí

$$\int_0^\pi \sin^0 x \, \mathrm{d}x = \pi, \quad \int_0^\pi \sin^1 x \, \mathrm{d}x = 2$$

a dle rekurze (4.11)

$$\int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^3 x \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{2}{3},$$

$$\int_0^\pi \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, \quad \int_0^\pi \sin^5 x \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Snadno se dá vypozorovat

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}, \quad \int_0^\pi \sin^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}.$$

Jelikož $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in \langle 0, \pi \rangle$ platí, že

$$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x,$$

pak
$$\forall n \in \mathbb{N}: \int_0^{\pi} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x \geq \int_0^{\pi} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x \geq \int_0^{\pi} \sin^{2n+2} x \,\mathrm{d}x,$$
$$\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \geq 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1} \geq \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$
Po úpravě získáme
$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \geq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$
Protože $\lim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\pi}{2}$, tak díky větě o sevřené posloupnosti platí
$$\lim \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

■

Jednoduchou úpravou dostaneme
$$\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{(3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1))^2 (2n+1)} =$$
$$= \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{(3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1))^2 (2n+1)} \cdot \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2} = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} =$$
$$= \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}.$$
Wallisova formule se dá tedy přepsat takto
$$\lim \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$
Odtud
$$\lim \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 n} = \underbrace{\lim \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)}}_{=\frac{\pi}{2}} \underbrace{\lim \frac{2n+1}{n}}_{=2} = \pi. \tag{4.12}$$
Nyní přistoupíme k důkazu věty 9.

Důkaz Vyjádříme-li ze vztahu (4.10) $n!$, dostaneme
$$n! = a_n \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{n}.$$
Pokud tuto rovnost dosadíme do (4.12) a uvědomíme-li si, že posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}^+$

(viz. důkaz věty 8), tak

$$\pi = \lim \frac{2^{4n}\left(a_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right)^4}{\left(a_{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}\right)^2 n} = \lim \frac{a_n^4}{a_{2n}^2 2} = \frac{a^4}{2a^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Protože $a \in \mathbb{R}^+$, dostaneme

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

■

Z vět 8 a 9 bezprostředně plynou nerovnosti

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12(n+1)}} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12(n-1)}}. \tag{4.13}$$

které upřesňují limitní vztah z věty 9. Tento odhad je již velice přesný.

Příklad 7

Odhadněte hodnotu $n!$ pro $n = 1000$ s pomocí odhadu (4.13). Pro porovnání v programem Maple spočteme hodnotu faktoriálu přesně

$$1000! = 4.0238726008 \ldots 10^{2567}.$$

Po dosazení do (4.13)

$$n! \geq \left(\frac{1000}{e}\right)^{1000} \sqrt{2\pi \cdot 1000}\, e^{\frac{1}{12(1000+1)}} \doteq 4.0238722050 \cdot 10^{2567},$$

$$n! \leq \left(\frac{1000}{e}\right)^{1000} \sqrt{2\pi \cdot 1000}\, e^{\frac{1}{12(1000-1)}} \doteq 4.0238728756 \cdot 10^{2567}.$$

■

4.3 Náhodná procházka na přímce

Náhodná procházka na přímce je matematická úloha zabývající se pravděpodobností a její zadání zní: Mějme zadanou pomyslnou přímku, po které se můžeme pohybovat dvěma směry, vlevo a vpravo. Na začátku stojíme v bodě 0. S pravděpodobností 50% se posuneme o jeden krok jedním, či druhým směrem. Otázka zní, jaká je pravděpodobnost, že po n krocích ($n \in \mathbb{N}$) se ocitneme zpátky ve startovním bodě 0? Tuto pravděpodobnost označíme $P(n)$.

Po lehkém zamyšlení si můžeme uvědomit, že stačí, aby počet kroků vlevo byl stejný jako počet kroků vpravo. Je tudíž jasné, že pokud je n liché, tak $P(n) = 0$. Proto budeme tento problém řešit pouze pro sudá čísla. Tudíž pro zadané n budeme počítat $P(2n)$. Pravděpodobnost zapíšeme jako počet příznivých možností, těch je $\binom{2n}{n}$, vydělený počtem všech možností, kterých je 2^{2n}. Tedy

$$P(2n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}},$$

$$P(2n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{2n}}.$$

Pokud bychom potřebovali tuto pravděpodobnost spočítat pro velké n, dostaneme se do problémů. Výpočetní výkon obyčejných strojů nám již nemusí stačit. Pokud se spokojíme pouze s odhadem pravděpodobnosti, tak můžeme použít odvozený odhad faktoriálu (4.13). Tudíž

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\ e^{\frac{1}{12(2n+1)}}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{1}{12(n-1)}}\right)^2 2^{2n}} \le \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \le \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\ e^{\frac{1}{12(2n-1)}}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{1}{12(n+1)}}\right)^2 2^{2n}}.$$

Díky několika úpravám dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{1}{12(2n+1)} - \frac{1}{6(n-1)}} \le \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \le \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{1}{12(2n-1)} - \frac{1}{6(n+1)}}.$$

Odhad pravděpodobnosti, že se po $2n$ krocích dostaneme zpátky do nuly, vypadá tedy takto

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-n-1}{8n^2-4n-4}} \le P(2n) \le \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-n+1}{8n^2+4n-4}}. \tag{4.14}$$

Příklad 8

Odhadněte pravděpodobnost pro úlohu náhodné procházky na přímce, pro 5000 kroků ($n = 2500$). Dosazením do vztahu (4.14), dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2500}} e^{\frac{-2500-1}{8\cdot 2500^2 - 4\cdot 2500 - 4}} \le P(2 \cdot 2500) \le \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 2500}} e^{\frac{-2500+1}{8\cdot 2500^2 + 4\cdot 2500 - 4}},$$

$$0.01128322716 \le P(5000) \le 0.01128322783$$

Pravděpodobnost, že po 5000 krocích se ocitneme zpátky v bodě 0, se pohybuje v intervalu $\langle 1.128322716, 1.128322783 \rangle$ %. Pro kontrolu, přesná hodnota pravděpodobnosti je $P(5000) = 1.1283227495$.

■

Zajímavá je také otázka, jak se změní pravděpodobnost, pokud n zvětšíme k-krát ($k \in \mathbb{N}$ je parametr). Z (4.14) víme, že

$$e^{\frac{-n-1}{8n^2-4n-4}} \leq P(2n)\sqrt{\pi n} \leq e^{\frac{-n+1}{8n^2-4n+4}}.$$

Jelikož

$$\lim e^{\frac{-n-1}{8n^2-4n-4}} = 1, \quad \lim e^{\frac{-n+1}{8n^2-4n+4}} = 1,$$

tak

$$\lim P(2n)\sqrt{\pi n} = 1.$$

Protože $k \in \mathbb{N}$, platí i

$$\lim P(2kn)\sqrt{\pi kn} = 1.$$

Proto můžeme tvrdit, že

$$\frac{\lim P(2n)\sqrt{\pi n}}{\lim P(2kn)\sqrt{\pi kn}} = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{P(2n)}{P(2kn)} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1.$$

Odtud

$$\lim \frac{P(2n)}{P(2kn)} = \sqrt{k}.$$

Můžeme tedy tvrdit, že pro dost velké n bude platit, že pokud ho zvýšíme k-krát, výsledná pravděpodobnost klesne přibližně $\sqrt{k}$-krát.

4.4 Ověření numerickými experimenty

Pravděpodobnost můžeme ověřit i experimentálně. Stačí když vygenerujeme dost náhodných procházek s $2n$ kroky a budeme sledovat kolik z nich skončilo zpátky v 0. S vyšším počtem provedených procházek bychom se měli ke skutečné pravděpodobnosti více blížit.

Součástí práce je program, který byl udělán v jazyce Python. Vypočítává právě zmíněnou experimentálně ověřenou pravděpodobnost, ale i přesnou pravděpodobnost (algoritmické spočtení faktoriálu) a odhad pravděpodobnosti z věty 8. Data jsou přehledně vypsána v tabulce.

Tabulka 4.1: Porovnání jednotlivých odhadů a experimentů

Kroků	500	5000
Přesná hodnota pravděpodobnosti	3.566465%	1.1283227495%
Odhad	$\langle 3.566454 , 3.566475 \rangle$%	$\langle 1.128322716 , 1.128322783 \rangle$%
Statistická hodnota(500 opakování)	4.39 %	1.2%
Statistická hodnota(1000 opakování)	3.4 %	0.9%
Statistická hodnota(2000 opakování)	3.35 %	1.25 %
Statistická hodnota(5000 opakování)	3.5 %	1.22%
Statistická hodnota(10000 opakování)	3.73 %	1.02 %
Statistická hodnota(15000 opakování)	3.44 %	1.16 %
Statistická hodnota(30000 opakování)	3.54 %	1.13 %

Kapitola 5

Závěr

V této bakalářské práci jsme rozebrali základní metody numerického výpočtu určitého integrálu (obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo). Ke každé metodě byla odvozena i její chyba. Čtenář se mohl více seznámit s výše zmíněnými pravidly (Kapitola 2) a také s řádným odvozením jejich chyb (Kapitola 3). Na vhodných příkladech jsme demonstrovali použití těchto metod. S pomocí jedné z metod jsme odvodili velmi přesný odhad faktoriálu, který navíc není výpočetně náročný (Kapitola 4.2). Tento odhad faktoriálu je zajímavý a už ne tolik známý problém. Jeho odvození je podrobně popsáno i s důkazem pomocných vět, které jsme využívali. Tento odhad jsme poté použili při řešení problému náhodné procházky na přímce (Kapitola 4.3). Součástí je malý program, jehož výstupem je přesná hodnota pravděpodobnosti, odhad pravděpodobnosti i experimentálně zjištěná pravděpodobnost. Přestože je tato práce spíše kompilačního charakteru, byly v ní některé části vypracovány podrobněji, než je obvyklé.

Literatura

1. JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet I.* Praha: Academia, 1984.
2. VONDRÁK, Vít; POSPÍŠIL, Lukáš. *Numerické metody I.* [Online]. 2011 [cit. 2021-04-02]. Dostupné z: `http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf`.
3. HOROVÁ, Ivana; ZELINKA, Jiří. *Numerické metody.* Brno: Masarykova univerzita, 2004.
4. VODSTRČIL, Petr; BOUCHALA, Jiří. Drobná překvapení spojená s numerickou integrací. *Pokroky matematiky fyziky a astronomie.* 2010, roč. 55, č. 4, s. 278–287.
5. JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* Praha: Academia, 1974.
6. VODSTRČIL, Petr. *Faktoriály a numerická integrace* [online] [cit. 2021-03-24]. Dostupné z: `http://am-nas.vsb.cz/vod03/osma/pdf/prednasky/2017/Petr_Vodstrcil.pdf`.
7. ROKYTA, Mirko. *Elementární odvození Stirlingovy formule* [online]. 2006 [cit. 2021-04-24]. Dostupné z: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/general/tahaky/Stirlingova_formule.pdf`.
8. CONRAD, Keith. *Stirling's formula* [online] [cit. 2021-04-24]. Dostupné z: `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/stirling.pdf`.